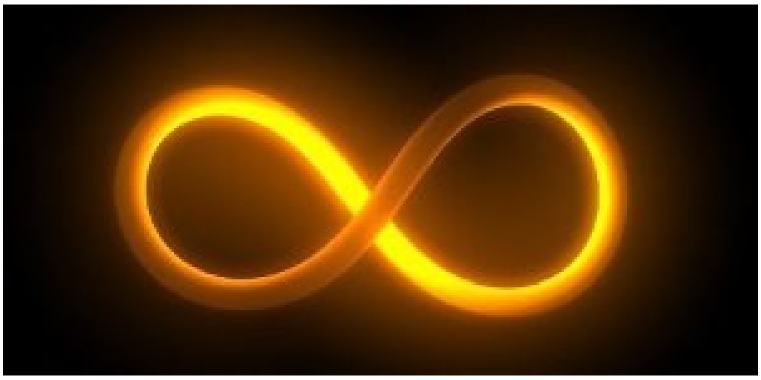
Le vertigini dell'infinito da Pitagora a Fra' Gioacchino

di Giuseppe Terregino

Quando si accenna all'infinito, se non si ha dimestichezza con la matematica, il pensiero corre subito a Leopardi. Perché con tale nome questi ha intitolato uno dei componimenti



più interiorizzati dai lettori. "Quel naufragar m'è dolce in questo mare" è l'indimenticabile verso di chi ha avuto la sorte di immedesimarsi alquanto nell'immaginazione dell'autore e vuole di tanto in tanto riprovare la sensazione di questo dolce naufragare.

Il pensiero del matematico corre, invece, al rovello mentale di una schiera di cultori della materia che dagli albori di essa hanno dovuto confrontarsi con questa entità affine allo spirito umano, dalla quale però la ragione ha sempre temuto di essere soverchiata. Come avvenne allorché nella scuola pitagorica (dal VI secolo a. C.) inaspettatamente si aprì una finestra sull'insondabile mondo delle tenebre quando l'universo sembrava essere illuminato dalla luce dell'aritmetica (scienza dei numeri). «Tutte le cose che si conoscono hanno un numero – diceva **Filolao** (V secolo a. C) –; senza questo nulla sarebbe possibile pensare né conoscere». Ma questi numeri non bastavano per determinare la relazione tra diagonale e lato del quadrato, dato che proprio dal teorema di Pitagora era lecito dedurre la non esistenza di una loro comune unità di misura mediante numeri interi, ossia in modo da potersi dire che le loro misure fossero esattamente uguali a due numeri interi, rispettivamente m ed n, dato che proprio per il detto teorema avrebbe dovuto essere il quadrato di m uguale al doppio del quadrato di n. Cosa che facilmente si dimostra inattuale nell'insieme dei numeri interi naturali. «*Ex eo* (teorema di Pitagora) - dice fra Gioacchino - *demonstrare licet quasdam extare lineas incommensurabiles, id est inter quas non potest inveniri mensura communis, seu quae non sunt inter se ut numerus aliquis ad alium numerum*».

Questo comportava il dovere ammettere la interminabile divisibilità di un segmento di retta senza esinanizione. E che quelli che chiamiamo punti non potevano neppure essere i costituenti della retta, così come, estendendo il discorso a figure di dimensioni maggiori, superfici e solidi, né le prime potevano essere ritenute somme in senso proprio delle linee rette tracciabili in esse secondo una data direzione, né i secondi (i solidi) potevano essere ritenuti somme delle loro sezioni piane, benché fossero attualmente pensabili.

Un vero e proprio rompicapo, che i matematici fecero di tutto per evitarlo ammettendo solo l'infinito potenziale, sia nell'accrescimento come nella divisione delle grandezze continue. In tale ordine di idee, che è poi quello del calcolo integrale, una grandezza finita può considerarsi il limite della somma delle sue parti aliquote potenzialmente infinitesime, ossia minori di qualsivoglia particella comunque piccola considerata, a mano che il numero delle sue divisioni diventa maggiore di qualunque valore numerico comunque grande considerato.

La questione della composizione del continuo si accende in matematica nel secolo XVII con l'uscita della *Geometria degli indivisibili* del gesuato (non gesuita) **Bonaventura Cavalieri** (1598-1647). Questi – come dice il titolo in latino della sua opera: *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* – nel promuovere in modo nuovo la Geometria, adotta il metodo di considerare associati alle figure geometriche (piane e solide) gli insiemi dei loro indivisibili (linee rette secondo una data direzione e sezioni piane secondo una data giacitura) per la determinazione delle aree e dei volumi. Quello che in maniera minima si continua a fare nella didattica attuale in riferimento ai solidi quando si applica il cosiddetto "principio" di Cavalieri per la determinazione dei volumi dei solidi rotondi.

La trovata di Cavalieri accese un contrasto dialettico piuttosto vivace, soprattutto tra i peripatetici, che erano contrari all'atomismo di ogni genere, qual appariva il metodo cavalieriano, legato proprio al termine indivisibile che nella variante di etimologia greca si traduce per l'appunto in atomo. Noi abbiamo un'eco di tale disputa anche nelle *Pysiologiae Disputationes* di **Frate Gioacchino da Amastra**, il quale definisce la questione «*omnium aliarum perceleber et perdifficilis*», appoggiando il suo giudizio al parere dello scrittore spagnolo **Diego Hurtado de Mendoza** (1503-1575) e del filosofo gesuita (pure lui spagnolo) **Rodrigo de Arriaga** (1592-1667).

Frate Gioacchino, il quale era, per sua stessa definizione, un aristotelico, sul punto argomenta con indiscutibile competenza, concludendo che «il continuo, o meglio le parti del continuo possono dividersi indefinitamente», con la precisazione che, riguardo alla composizione del continuo, questo non sia composto soltanto di elementi indivisibili e neppure di soli elementi divisibili, ma di entrambi nell'insieme.

La quale conclusione era stata l'obiezione principale alla *Geometria degli indivisibili* del matematico svizzero **Paolo Guldino** (1577-1643), al quale invano replicava fra Bonaventura sottolineando che egli non intendeva dare una risoluzione al problema della composizione del continuo, ma soltanto associare alle figure gli insiemi delle loro sezioni secondo una data direzione (se piane) o, se solide, secondo una determinata giacitura, in una relazione di corrispondenza biunivoca, per risalire dai rapporti di queste sezioni a quelli delle figure medesime.

In effetti, si trattava di un'anticipazione dell'analisi dell'infinito che sarebbe venuta qualche secolo più avanti. Una analisi che entusiasmava **Galileo**, il quale entusiasta per la maniera agile e brillante con cui si giungeva per questa via alla determinazione del volume della sfera mediante la considerazione di quella figura che va sotto il nome di "scodella di Galileo", coglieva con la sua fervida immaginazione la inoppugnabile realtà di un infinito attuale che non può non essere costituito da entità elementari "non quante" (prive di estensione). «*Stante – egli dice – che la linea e ogni continuo siano divisibili in sempre divisibili, non veggo come si possa sfuggire, la composizione essere di infiniti indivisibili …; e l'essere le parti infinite si tira in conseguenza essere non quante, perché quanti infiniti fanno un'estensione infinita; e così abbiamo il continuo composto d'infiniti indivisibili*».

Questo salto di qualità, anche rispetto allo stesso Cavalieri, nella visione dello spazio geometrico è frutto dell'immaginazione di un genio, la quale coglie come illuminata da un lampo una realtà che non può non sfuggire alla mente adusa a considerare realtà finite, sostanzialmente diverse da quella dell'infinito, ove ogni categoria del finito perde senso; come avviene quando si confronta la potenza (numerosità) di un suo sottoinsieme proprio con quella di un insieme. Nel finito la prima è sempre minore della seconda. Non cosi per gli insiemi infiniti. Basta confrontare i numeri pari, che sono un sottoinsieme proprio dei numeri naturali, con l'insieme di loro appartenenza, associando a ciascun pari il naturale corrispondente e viceversa, e avremo una relazione di corrispondenza biunivoca, la quale ci dice che i soli numeri pari sono esattamente tanti quanti sono tutti i numeri naturali. Un paradosso!

Ma i paradossi dell'infinito (che, si badi, non sono antinomie) sono tanti. E solo un genio può cogliere tale realtà in atto. O un poeta, come ci sovviene di Leopardi, che con un lampo della sua immaginazione poetica coglie l'infinito in atto hegelianamente in contrapposizione con la ristrettezza della visuale dovuta alla vicinanza della "siepe". Lo stesso poeta che secondo **L. Lombardo-Radice** (*L'infinito*, Editori Riuniti 1981, pag. 9) anticipa la conclusione passando «dallo spazio potenzialmente finito, che nessuna "siepe" chiude (se non allo sguardo), … alla riflessione sul tempo *potenzialmente infinito*, del quale non si riesce a pensare un'ultima stagione», quando - aggiungiamo - il palesarsi della infinità in atto (l'eterno), al di là di quella (la infinità potenziale) che «è caratteristica del nostro modo (normale) di concepire lo spazio e il tempo, il pensiero "s'annega" in un naufragio tanto ineluttabile quanto tuttavia "dolce".

5-mar-2017 17.29

Nota sull'infinito

Caro amico e collega, la nota che le accludo non reca una novità in assoluto. Essa è, infatti, un riassunto un tantino raffazzonato dell'articolo *Galileo fra' Gioachino e gli indivisibili*, presente nel suo blog e con mia sorpresa anche nella "Biblioteca del Museo delle Scienze di Trento", come lei può facilmente riscontrare. Ho voluto richiamare qui parte del contenuto di quella nota sotto un'ottica alquanto diversa per mettere ancora in evidenza come ad un attento esame della sua opera, cosa che ho fatto meglio di recente, il nostro Frate non possa essere considerato un fraticello incolto e pedante, ma piuttosto un intellettuale di un certo rango nella Sicilia spagnola del suo tempo. Il che si evince anche dalle citazioni presenti nel suo compendio, che lo collocano nella corrente di pensiero vigente in un preciso ambito religioso di una determinata area geografica.

Capisco bene che l'astrusità del contenuto di questa mia nota la renda poco accattivante in assoluto e più ancora in relazione alle finalità di un blog che intende essere, giustamente, il punto d'incontro di gente che vuole cogliere il senso della propria identità paesana. L'importante che non venga considerata una inopportuna invasione di campo.

Gradisca, con le mie scuse per il tempo che vengo a rubarle, un cordiale saluto e l'augurio di ogni bene.

Giuseppe Terregino